

## Correction Feuille Exercice 17

*✍ Modéliser un problème de probabilité***Exercice 10 (Trouver le bon nombre)**

Vous choisissez un nombre entre 1 et 100 et jouez contre un ordinateur. L'ordinateur tire un nombre aléatoire entre 1 et 100 jusqu'à découvrir votre nombre. On note les événements

$$\begin{aligned} A_n &= \{ \text{Au tirage } n^{\text{o}}, \text{ L'ordinateur donne la bonne réponse} \} \\ G_n &= \{ \text{L'ordinateur gagne la partie au } n\text{-ième tirage} \} \\ G &= \{ \text{L'ordinateur gagne} \} \end{aligned}$$

$$G_n = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n = \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k} \right) \cap A_n.$$

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n.$$

**Exercice 11**

Emma et Pauline lancent le même dé à tour de rôle (Emma commence). Le gagnant est le premier à obtenir 6. On s'intéresse aux trois événements

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{victoire de Pauline} \} \\ B &= \{ \text{victoire d'Emma} \} \\ C &= \{ \text{il n'y a pas de vainqueur} \} \end{aligned}$$

On introduit également les événements suivants :

$$\begin{aligned} F_n &= \{ \text{fin de la partie au } n\text{-ième lancer} \} \\ S_n &= \{ \text{le } n\text{-ième lancer donne un 6} \} \\ F &= \{ \text{La partie se termine} \} \end{aligned}$$

1. Nous avons

$$A = F_2 \cup F_4 \cup \dots \cup F_{2n} \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2k}$$

$$B = F_1 \cup F_3 \cup F_5 \cup \dots \cup F_{2n+1} \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2k-1}$$

$$C = \overline{A} \cap \overline{B} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{F_k}.$$

2. On obtient  $F_n$  à l'aide de

$$F_n = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n = \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \right) \cap S_n$$

3. On traduit l'évènement  $F$  par

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k$$

**Exercice 12**

Luke et Han jouent chacun avec deux dés équilibrés. Luke gagnera s'il obtient un total de 6. Han gagne en amenant un total de 5. Han joue le premier et ensuite (s'il y a une suite), Luke et Han jouent alternativement. On note

$$\begin{aligned} S_n &= \{ \text{Obtenir un 6 en lançant deux dés au } n\text{-ième lancer} \} \\ C_n &= \{ \text{Obtenir un 5 en lançant deux dés au } n\text{-ième lancer} \} \\ L_n &= \{ \text{Luke gagne à son } n\text{-ième lancer} \} \\ H_n &= \{ \text{Han gagne à son } n\text{-ième lancer} \} \\ L &= \{ \text{Luke a gagné} \} \\ H &= \{ \text{Han a gagné} \} \end{aligned}$$

1. On a

$$L_n = \overline{C_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{C_3} \cap \dots \cap \overline{C_{2n-1}} \cap S_{2n} = \left( \bigcap_{k=1}^n \overline{C_{2k-1}} \right) \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_{2k}} \right) \cap S_{2n}$$

$$H_n = \overline{C_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{C_3} \cap \dots \cap \overline{S_{2n-2}} \cap C_{2n-1} = \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{C_{2k-1}} \right) \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_{2k}} \right) \cap C_{2n-1}$$

2. On a

$$L = \bigcup_{n=1}^{+\infty} L_n \text{ et } H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n$$

*Calculer la probabilité d'une union ou d'une intersection infinie*

**Exercice 13**

On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne un 6.

— On note l'évènement  $A_n$  : "obtenir le premier 6 au  $n^{\text{ième}}$  lancer" et les évènements  $S_n$  : "Obtenir un 6 au  $n^{\text{ième}}$  lancer". On a alors

$$A_n = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n = \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \right) \cap S_n$$

Les évènements étant indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P \left( \left( \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \right) \cap S_n \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{S_k}) \times P(S_n) \\ &= \left( \frac{5}{6} \right)^{n-1} \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } P(A_n) = \left( \frac{5}{6} \right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

— On note l'évènement  $A$  : "Obtenir au moins un 6". On a

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Les évènements  $A_1, A_2, \dots$ , sont 2 à 2 disjoints, donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

En passant par les sommes partielles

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} &= \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^k \end{aligned}$$

La série  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{5}{6}\right)^n$  est une série géométrique convergente et donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1/6} \end{aligned}$$

Finalement  $P(A) = 1$ .

#### Exercice 14

On a  $\forall n \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$  ainsi  $P(A_n) = \frac{1}{100}$ . Les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont des évènements indépendants donc

$$P(G_n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{A_k}) \times P(A_n)$$

$$\text{Donc } P(G_n) = \left(\frac{99}{100}\right)^{n-1} \times \frac{1}{100}.$$

Les évènements  $G_1, G_2, \dots$  sont 2 à 2 disjoints et donc

$$\begin{aligned} P(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^{n-1} \times \frac{1}{100} \end{aligned}$$

En passant par les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{99}{100}\right)^{k-1} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{99}{100}\right)^k$$

$$\text{Donc } P(G) = \frac{1}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{99}{100}} = 1.$$

**Exercice 15 (\*)**

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne que l'on remet après avoir noté la couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule noire. On considère les événements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{On effectue un nombre fini de tirages} \} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, F_n &= \{ \text{Le jeu s'arrête au } n\text{-ième tirage} \} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n &= \{ \text{On tire une boule blanche au } n\text{-ième tirage} \} \end{aligned}$$

1. Soient  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $i \neq j$ . Le jeu ne peut pas s'arrêter à la fois au  $i$ -ième tirage et au  $j$ -ième tirage ainsi  $F_i \cap F_j = \emptyset$ .

Les ensembles  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont deux à deux disjoints.

2. On a alors

$$F_n = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}$$

3. On a

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n.$$

Les événements  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sont indépendants donc

$$P(F_n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(B_k) \times P(\overline{B_n}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Ainsi

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(F_n) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

En passant par les sommes partielles,

$$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Ainsi

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times 3$$

$$\text{Donc } P(A) = 1.$$

**Exercice 16 (\*)**

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P(S_n) = \frac{1}{6}$$

Les évènements  $S_1, S_2, \dots, S_n$  sont indépendants donc

$$P(F_n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{S_k}) \times P(S_n)$$

On a donc

$$P(F_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}$$

On a

$$P(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(F_{2k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} \times \frac{1}{6}$$

En passant par les sommes partielles,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} \times \frac{1}{6} &= \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{25}{36}\right)^k \end{aligned}$$

On a donc

$$P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{25}{36} \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{5}{36} \times \frac{36}{11}$$

$$\text{Ainsi } P(A) = \frac{5}{11}.$$

On peut également représenter

$$\overline{F} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{S_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bigcap_{k=1}^n \overline{S_k}$$

Ainsi, comme les évènements  $S_1, S_2, \dots$ , sont indépendants

$$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{S_k}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n P(\overline{S_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \end{aligned}$$

$$\text{On a alors } P(C) = P(\overline{F}) = 0 \text{ et } P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1$$

Comme  $A \cup B = F$ , les évènements  $A$  et  $B$  sont disjoints, on a

$$P(B) = P(F) - P(A) = 1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}.$$

**Exercice 17 (\*\*)**

En utilisant le dénombrement, on calcule

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(S_n) = \frac{5}{36} \text{ et } P(C_n) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Les évènements  $C_1, S_1, C_2, S_2, \dots, C_{2n-1}, S_{2n}$  sont indépendants donc

$$\begin{aligned} P(L_n) &= \left( \prod_{k=1}^n P(\overline{C_{2k-1}}) \right) \times \left( \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{S_{2k}}) \right) \times P(S_{2n}) \\ &= \left( \frac{8}{9} \right)^n \times \left( \frac{31}{36} \right)^{n-1} \times \frac{5}{36} \\ &= \left( \frac{8}{9} \right)^n \times \left( \frac{31}{36} \right)^n \times \frac{36}{31} \times \frac{5}{36} \\ &= \frac{5}{31} \left( \frac{8}{9} \times \frac{31}{36} \right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } P(L_n) = \frac{5}{31} \left( \frac{62}{81} \right)^n$$

On a également

$$\begin{aligned} P(H_n) &= \left( \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{C_{2k-1}}) \right) \times \left( \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{S_{2k}}) \right) \times P(C_{2n-1}) \\ &= \left( \frac{8}{9} \right)^{n-1} \times \left( \frac{31}{36} \right)^{n-1} \times \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } P(H_n) = \frac{1}{9} \left( \frac{62}{81} \right)^{n-1}.$$

On aura

$$\begin{aligned} P(L) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{31} \left( \frac{62}{81} \right)^n \\ &= \frac{5}{31} \times \frac{62}{81} \times \frac{1}{1 - \frac{62}{81}} \\ &= \frac{10}{81} \times \frac{81}{19} \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } P(L) = \frac{10}{19}$$

De même

$$\begin{aligned} P(H) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9} \left( \frac{62}{81} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{62}{81}} \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{81}{19} \\ &= \frac{9}{19} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Enfin, } P(H) = \frac{9}{19}}$$

## ✍ Probabilités et suites

### Exercice 18 ()

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0,3 ; mais si elle a fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0,9 ; On note  $p_n$  la probabilité que cette personne fume au jour  $J_n$  et  $F_n$  l'évènement "la personne fume au jour  $J_n$ "

1. Au jour 0 (c'est-à-dire avant de commencer à arrêter de fumer) la probabilité que cette personne fume est 1

$$\boxed{p_0 = 1.}$$

2. Comme la personne fumait au jour 0, on a d'après l'énoncé

$$\boxed{p_1 = 0,1}$$

Le système  $(F_1; \overline{F_1})$  est un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F_2) = P(F_1)P_{F_1}(F_2) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(F_2)$$

C'est-à-dire,

$$p_2 = 0,1 \times 0,1 + 0,9 \times 0,7$$

$$\boxed{\text{Ainsi } p_2 = 0,64.}$$

3. Le système  $(F_n; \overline{F_n})$  est un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F_{n+1}) = P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) + P(\overline{F_n})P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})$$

C'est-à-dire

$$p_{n+1} = p_n \times 0,1 + (1 - p_n) \times 0,7$$

$$\boxed{\text{Ainsi pour tout } n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = 0,7 - 0,6p_n.}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On résout alors l'équation

$$x = 0,7 - 0,6x$$

$$\iff 1,6x = 0,7$$

$$\iff x = \frac{0,7}{1,6} = \frac{7}{16}$$

On pose alors  $v_n = p_n - \frac{7}{16}$ . On obtient après calcul

$$v_{n+1} = -0,6v_n$$

La suite  $(v_n)$  est bien une suite géométrique avec  $v_0 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{9}{16} \times (-0,6)^n$$

et donc

$$p_n = \frac{9}{16} \times (-0,6)^n + \frac{7}{16}.$$

4. On a  $-1 < -0,6 < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,6)^n = 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{7}{16}.$$

Cette personne ne va pas arrêter de fumer.

### Exercice 19 (\*)

On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A,B,C d'un triangle selon le procédé suivant :

- si la particule se trouve en B, elle y reste.
- si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de façon équiprobable.
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.
- à la première seconde, elle se pose au hasard sur l'un des trois sommets.

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'évènement : "A la  $n^{\text{ième}}$  seconde, la particule se trouve en A (resp. B,C)". On note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités des évènements  $A_n, B_n, C_n$ .

1. A la première seconde, elle est au hasard sur les 3 sommets et donc

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1/3.$$

2. Les évènements  $A_n, B_n$  et  $C_n$  forment un système complet d'évènements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{7}{12}c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ c_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \end{aligned}$$

3. D'après les équations précédentes, on a

$$c_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1}$$

et  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n$  donc

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{12}c_n \right) + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{1}{9}a_n + \frac{1}{36}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} \end{aligned}$$

On a alors, en utilisant la troisième formule,  $\frac{1}{3}a_n = c_{n+1} - \frac{1}{3}c_n$ . Et donc

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{1}{3}c_{n+1} - \frac{1}{9}c_n + \frac{1}{36}c_n + \frac{1}{3}c_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{3}{36}c_n \\ &= \frac{2}{3}c_{n+1} - \frac{1}{12}c_n \end{aligned}$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On pose l'équation

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0.$$

Le discriminant est  $\Delta = \frac{4}{9} - \frac{4}{12} = \frac{1}{9}$ . Cette équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

. Il existe donc deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tel que

$$c_n = \alpha \frac{1}{2^n} + \beta \frac{1}{6^n}$$

Or  $c_1 = \frac{1}{3}$  et  $c_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6} &= \frac{1}{3} \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{36} &= \frac{2}{9} \end{cases} &\iff \begin{cases} 3\alpha + \beta &= 2 \\ 9\alpha + \beta &= 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\alpha + \beta &= 2 \\ 6\alpha &= 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta &= -1 \\ \alpha &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}}$$

D'après la troisième équation,  $a_n = 3c_{n+1} - c_n$  et donc

$$a_n = 3 \left( \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}} \right) - \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right)$$

Finalement

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2^{n+1}} + 3 \times \frac{1}{6^{n+1}}}$$

Et enfin,  $b_n = 1 - a_n - c_n$ , c'est à dire

$$b_n = 1 - \left( \frac{1}{2^{n+1}} + 3 \times \frac{1}{6^{n+1}} \right) - \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right)$$

donc

$$b_n = 1 - \frac{3}{2^{n+1}} + \frac{3}{6^{n+1}}.$$

4. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6^n} = 0$ . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$$

La particule de pollen finira presque sûrement sur le sommet  $B$ . On dit en physique que le point  $B$  est un attracteur. Cela a du sens puisque une fois que la particule est en  $B$ , elle y reste, ce qui n'est pas le cas des autres sommets.

Pour la petite histoire, l'étude du mouvement erratique des particules de Pollen dans de l'eau a donné naissance à la théorie du mouvement Brownien que l'on retrouve en économie financière.

### Exercice 20 (Deux pièces)

On dispose de deux pièces identiques d'apparence, la pièce A donnant Pile avec une probabilité  $a$  et la pièce B donnant Pile avec une probabilité  $b$ . Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient Pile, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce pour le lancer suivant. On note, pour tout  $k \geq 1$ ,  $A_k$  l'événement "le  $k^{\text{ième}}$  lancer se fait avec la pièce A",  $B_k = \overline{A_k}$  et  $E_k$  l'événement "le  $k^{\text{ième}}$  lancer amène Pile".

1. Pour  $k \geq 1$ , la famille  $(A_k, B_k)$  est un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E_k) &= P(A_k)P_{A_k}(E_k) + P(B_k)P_{B_k}(E_k) \\ &= aP(A_k) + bP(B_k) \\ &= aP(A_k) + b(1 - P(A_k)) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } P(E_k) = b + (a - b)P(A_k).$$

2. Si au  $k$ -ième lancer, on lance la pièce A, la probabilité de lancer la pièce A au  $(k + 1)$ -ième lancer (c'est-à-dire garder la même pièce) est  $a$ . Autrement dit,

$$P_{A_k}(A_{k+1}) = a$$

De la même façon,

$$P(B_k)P_{B_k}(A_{k+1}) = 1 - b$$

Pour  $k \geq 1$ , la famille  $(A_k, B_k)$  est un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(A_k)P_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(A_{k+1}) \\ &= aP(A_k) + (1 - b)P(B_k) \\ &= aP(A_k) + (1 - b)(1 - P(A_k)) \\ &= (a + b - 1)P(A_k) + 1 - b \end{aligned}$$

La suite  $(P(A_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$  est une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation

$$\begin{aligned} x &= (a + b - 1)x + (1 - b) \iff (2 - a - b)x = 1 - b \\ &\iff x = \frac{1 - b}{2 - (a + b)} \end{aligned}$$

On pose la suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $v_k = P(A_k) - \frac{1-b}{2-(a+b)}$ . On a alors  $v_1 = \frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-(a+b)}$ .

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= P(A_{k+1}) - \frac{1-b}{2-(a+b)} \\ &= (a+b-1)P(A_k) + (1-b) - \frac{1-b}{2-(a+b)} \\ &= (a+b-1) \left( v_k + \frac{1-b}{2-(a+b)} \right) + \frac{(1-b)(2-(a+b))}{2-(a+b)} - \frac{1-b}{2-(a+b)} \\ &= (a+b-1)v_k + \frac{(a+b-1)(1-b)}{2-(a+b)} + \frac{(1-b)(1-(a+b))}{2-(a+b)} \\ &= (a+b-1)v_k \end{aligned}$$

Enfin,

$$v_k = (a+b-1)^{k-1}v_1 = (a+b-1)^{k-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-(a+b)} \right)$$

Ainsi

$$P(A_k) = (a+b-1)^{k-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-(a+b)} \right) + \frac{1-b}{2-(a+b)}$$

$$\text{De plus } P(E_k) = b + (a-b) \left( (a+b-1)^{k-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-(a+b)} \right) + \frac{1-b}{2-(a+b)} \right)$$

### Exercice 21 (\*\*)

Un jeu consiste à déplacer un jeton autour des sommets d'un carré AGBP à l'aide d'un dé. A chaque tour, le joueur lance le dé et déplace le jeton du nombre de sommets donné par le dé et dans le sens des aiguilles d'une montre. Le joueur joue jusqu'à tomber sur G, il a alors gagné, ou jusqu'à tomber sur P, il a alors perdu. Le joueur  $J$  choisit de partir du sommet A et le joueur  $J'$  du sommet B. Considérons les événements :  $V$  : " $J$  gagne" ;  $V'$  : " $J'$  gagne" ;  $B_1$  resp.  $(B'_1)$  " $J$  (resp.  $J'$ ) va en B à l'issue du premier lancer".

1. Afin de bien comprendre le système complet d'évènement sous-jacent, notons

- $A_1$  : " $J$  va en A à l'issue du premier lancer".
- $V_1$  : " $J$  a gagné à l'issue du premier lancer".
- $P_1$  : " $J$  a perdu à l'issue du premier lancer".

Les événements  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $V_1$  et  $P_1$  forment un système complet d'évènements. De plus, pour retomber sur le sommet A, il faut faire 4 au dé, pour tomber sur le sommet B, il faut faire 2 ou 6 au dé, pour tomber sur le sommet G, il faut faire 1 ou 5 au dé donc

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, \quad P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(V_1) = \frac{1}{3}, \quad P(P_1) = \frac{1}{6}$$

Enfin, on cherche les probabilités conditionnelles. On remarque que  $P_{V_1}(V) = 1$  puisque l'on a forcément gagné si on tombe sur V au premier lancer. De même  $P_{P_1}(V) = 0$ . Enfin, on remarque que  $P_{A_1}(V) = P(V)$ . En effet, si l'on retombe sur le sommet A, c'est comme si le jeu recommençait du début et donc la probabilité de gagner est  $P(V)$ . En appliquant la formule des probabilités

totales

$$\begin{aligned}
 P(V) &= P(A_1)P_{A_1}(V) + P(B_1)P_{B_1}(V) + P(V_1)P_{V_1}(V) + P(P_1)P_{P_1}(V) \\
 \Leftrightarrow P(V) &= \frac{1}{6}P(V) + \frac{1}{3}P_{B_1}(V) + \frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{6}P(V) &= \frac{1}{3}(1 + P_{B_1}(V)) \\
 \Leftrightarrow \boxed{P(V) = \frac{2}{5}(1 + P_{B_1}(V))}
 \end{aligned}$$

2. En notant de la même façon les événements  $A'_1$ ,  $V'_1$  et  $P'_1$ , on a

$$P(A'_1) = \frac{1}{3}, \quad P(B'_1) = \frac{1}{6}, \quad P(V'_1) = \frac{1}{6}, \quad P(P'_1) = \frac{1}{3}$$

De plus, de même que précédemment

$$P_{B'_1}(V') = P(V'), \quad P_{P'_1}(V') = 0, \quad P_{V'_1}(V') = 1$$

Enfin, on remarque que  $P_{A'_1}(V') = P(V)$ . En effet, la probabilité de gagner lorsque l'on sait que l'on tombe sur la case A au premier lancer est la même que si l'on avait débuté sur la case A. C'est donc la probabilité de gagner du joueur J. En appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(V') &= P(A'_1)P_{A'_1}(V') + P(B'_1)P_{B'_1}(V') + P(V'_1)P_{V'_1}(V') + P(P'_1)P_{P'_1}(V') \\
 \Leftrightarrow P(V') &= \frac{1}{3}P(V) + \frac{1}{6}P(V') + \frac{1}{6} \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{6}P(V') &= \frac{1}{6}(1 + 2P(V)) \\
 \Leftrightarrow \boxed{P(V') = \frac{1}{5}(1 + 2P(V))}
 \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement, on a  $P_{B_1}(V) = P(V')$  et donc on a le système d'équation à deux inconnues

$$\begin{cases} P(V) = \frac{2}{5}(1 + P(V')) \\ P(V') = \frac{1}{5}(1 + 2P(V)) \end{cases}$$

Ainsi, par substitution,

$$\begin{aligned}
 P(V) &= \frac{2}{5} \left( 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}P(V) \right) \\
 \Leftrightarrow P(V) - \frac{4}{25}P(V) &= \frac{12}{25} \\
 \Leftrightarrow \frac{21}{25}P(V) &= \frac{12}{25} \\
 \Leftrightarrow \boxed{P(V) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}}
 \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
 P(V') &= \frac{1}{5} \left( 1 + 2 \times \frac{4}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{8}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{5} \times \frac{15}{7} \\
 &= \boxed{\frac{3}{7}}
 \end{aligned}$$